ریاضی مهندسی پیشرفته
معادلات مشتق جزئی

مسائل در مختصات قطبی و استوانه ای

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

Bessel's Diff. Eq. معادلات بسل

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)\, y = 0$$

در حل مسائل PDE در مختصات قطبی و استوانه‌ای، به روش جداسازی، اغلب معادله دیفرانسیل بسل حاصل می‌شود.

با به کارگیری روش سری توانی و روش فروبنیوس می‌توان نشان داد که جواب معادله بسل به صورت زیر خواهد شد:

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, \Gamma(\nu+1)}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(n+\nu+1)}\, x^{2n+\nu}$$

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, \Gamma(\nu+1)}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(n+\nu+1)} x^{2n+\nu}$$

با فرض $c_0 = \dfrac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}$

$$y(x) = J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}\, n!\, \Gamma(n+\nu+1)}$$

$J_\nu(x)$ را تابع بسل نوع اول می گویند.

اگر ν یک عدد صحیح دارد $\nu = n$

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+n}\, m!\, (n+m)!}$$

در تعریف تابع بسل، تابع $\Gamma(x)$ یا گاما به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

برخی خواص تابع گاما

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x), \quad x>0$$

$$\Gamma(x+1) = x!\ ,$$

$$\Gamma(x) = (x-1)!$$

$$0! = 0\ , \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

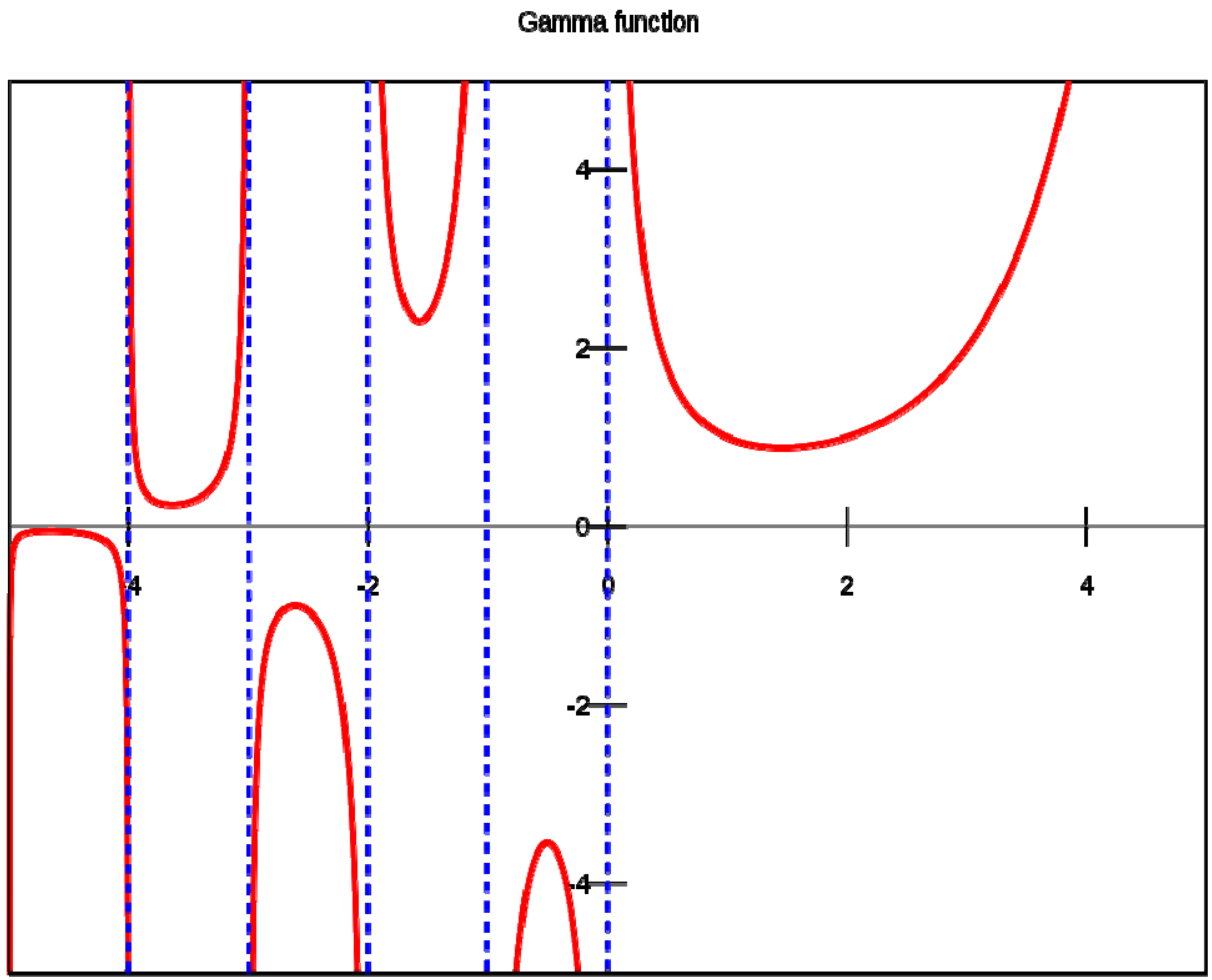
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ ,$$

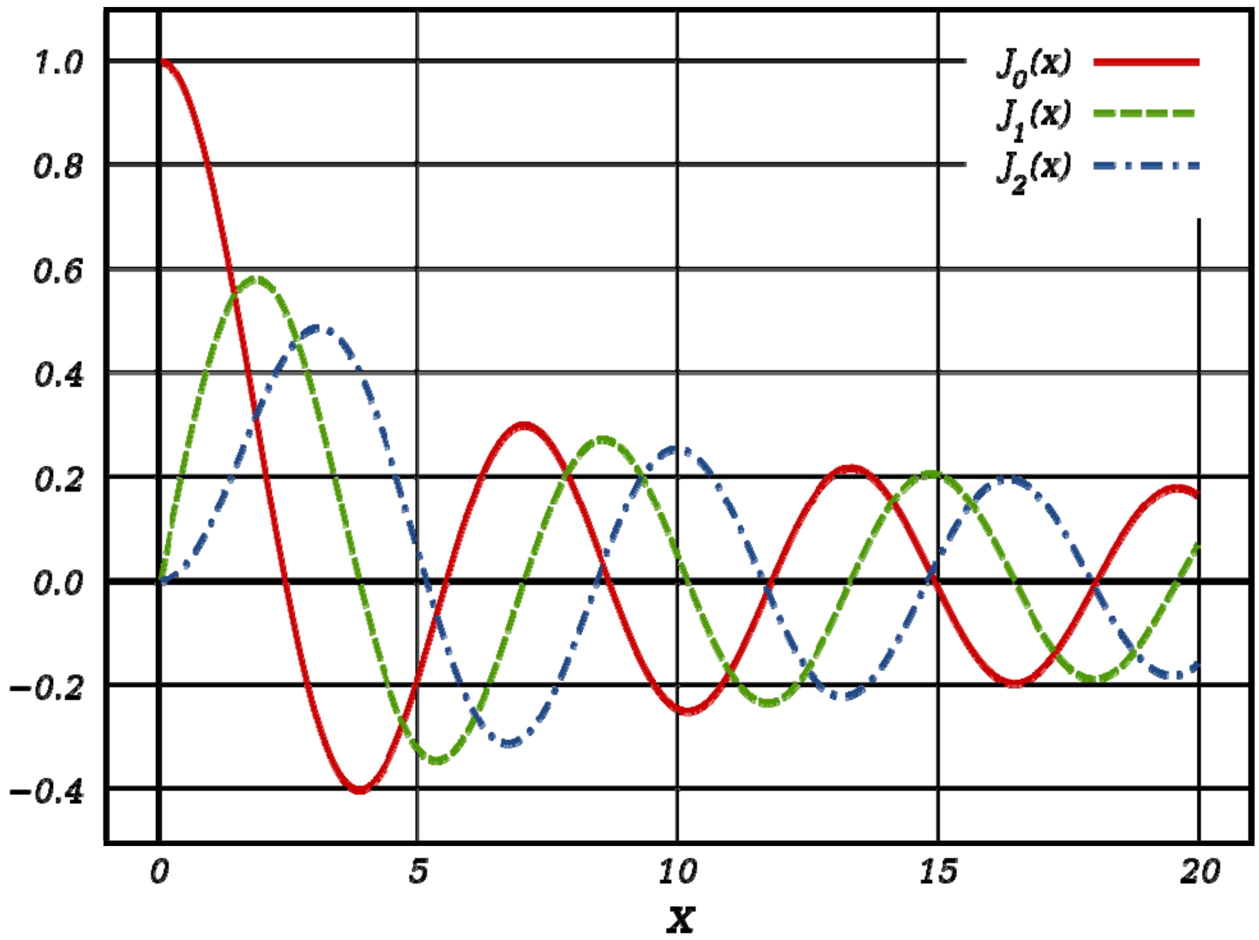
$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

اگر x مقدار صحیح باشد، $x=n$

$$\Gamma(n+1) = n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$$

$$\Gamma(-n) = \pm\infty\ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$


Gamma function
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4


$J_0(x)$
$J_1(x)$
$J_2(x)$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
0
5
10
15
20
x

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

معادله بسل یک معادله مرتبه 2 می باشد. بنابراین برای نوشتن پاسخ عمومی آن به پاسخ دومی که از $J_\nu(x)$ مستقل خطی باشد نیاز است. در اینجا سه حالت رخ می دهد

حالت اول، 2ν عدد صحیح نباشد، آنگاه، J_ν و $J_{-\nu}$ مستقل خطی هستند و

جواب معادله بسل به صورت زیر خواهد شد

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$$

حالت دوم: اگر 2ν عدد صحیح مثبت فرد باشد، $2\nu = 2n+1$

پس $\nu = n + \frac{1}{2}$ ، پاسخ عمومی به صورت زیر خواهد شد

$$y(x) = C_1 J_{n+\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{n-\frac{1}{2}}(x)$$

حالت سوم: اگر 2ν عدد صحیح باشد ولی فرد نباشد، می توان نشان داد که

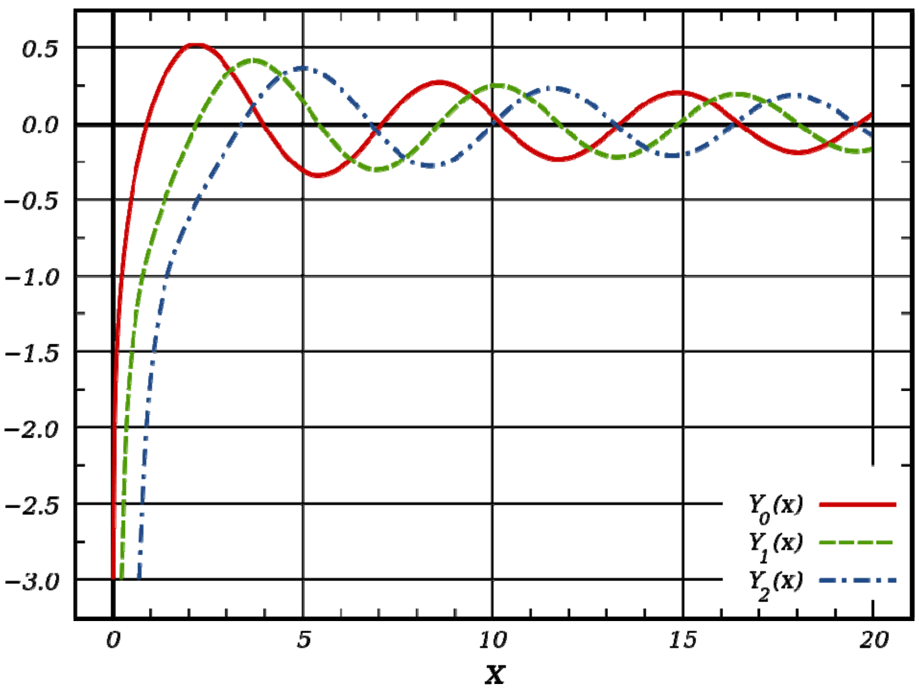
در این حالت $J_{-\nu}(x) = (-1)^n J_\nu(x)$ ، پس برای جواب دوم از $J_{-\nu}$ نمی توان

استفاده کرد. در این حالت پاسخ عمومی بصورت زیر می شود

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$

به $Y_\nu(x)$ تابع بسل نوع دوم گفته می شود و به صورت زیر تعریف می شود

$$Y_\nu = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left[J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\right]$$



Hankel Functions

توابع بسل نوع سوم یا توابع هنکل

$$H^1_\nu(x) = J_\nu(x) + i\, Y_\nu(x)$$

$$H^2_\nu(x) = J_\nu(x) - i\, Y_\nu(x)$$

- آنها توابع هنکل اول و دوم از مرتبه ν گفته می شود که از همدیگر مستقل هستند و هرکدام از J_ν نیز مستقل می باشند.

بنابراین پاسخ عمومی معادله بسل را می توان به شکلهای زیر بیان کرد

$$y(x) = A_1 J_\nu(x) + A_2 Y_\nu(x) = B_1 J_\nu(x) + B_2 H^{(1)}_\nu(x)$$

$$= C_1 J_\nu(x) + C_2 H^{(2)}_\nu(x) = D_1 H^{(1)}_\nu(x) + D_2 H^{(2)}_\nu(x)$$

Modified Bessel's Diff. Eq.

معادله بسل اصلاح شده

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0$$

جواب عمومی این معادله به صورت زیر می باشد

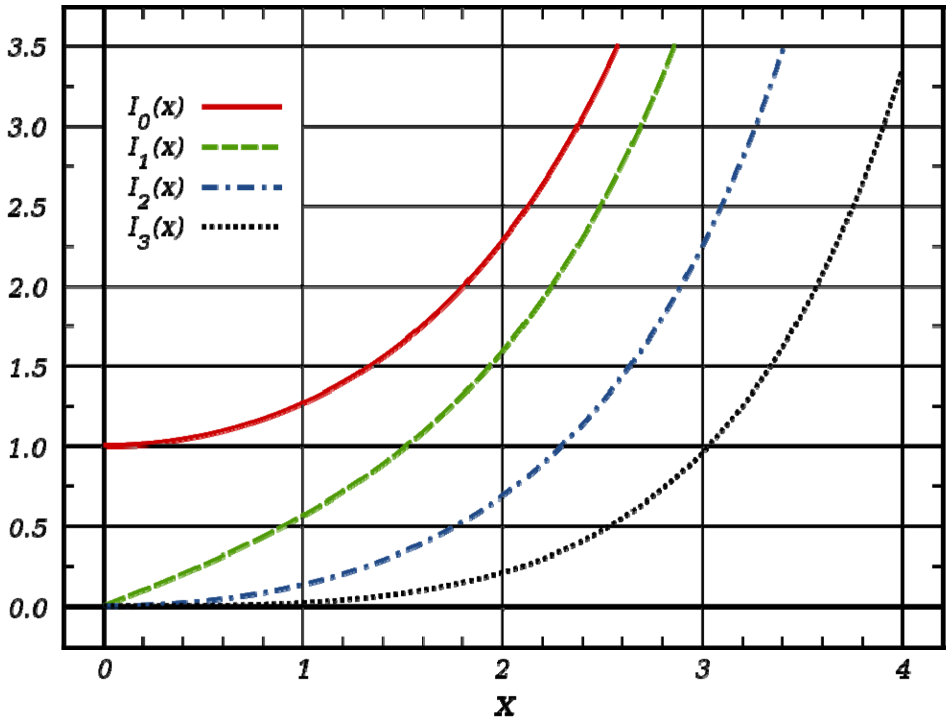
$$y(x) = c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x)$$

I_ν تابع بسل اصلاح شده نوع اول

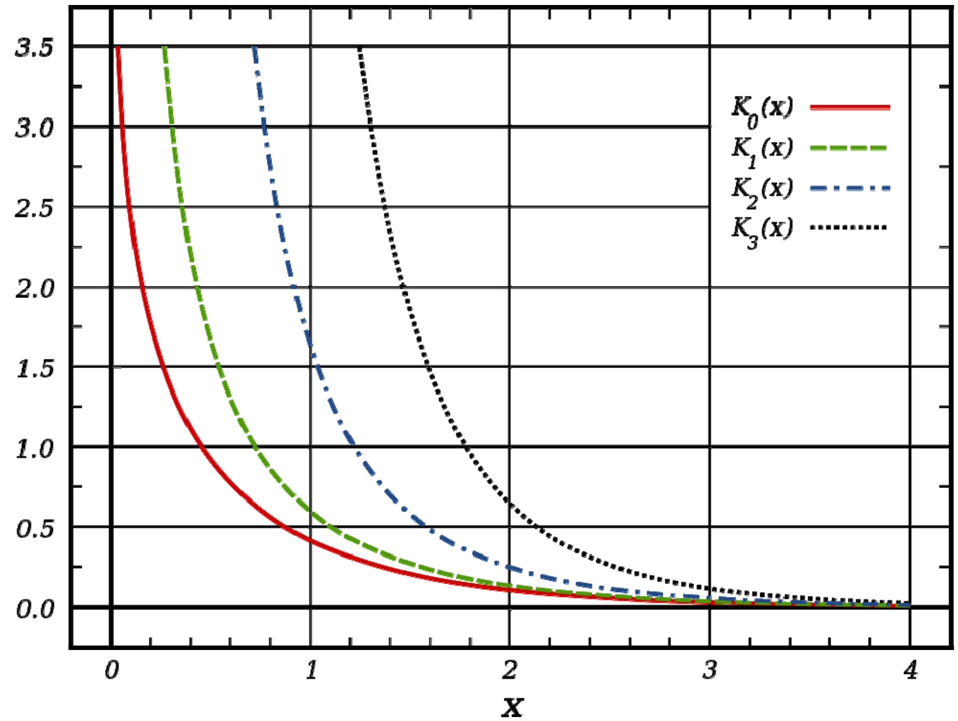
K_ν " " " " نوع دوم

$$I_\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu}\, n!\, \Gamma(n+\nu+1)}$$

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad , \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\, \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}$$



3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
4
x
$I_0(x)$
$I_1(x)$
$I_2(x)$
$I_3(x)$



3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
4
x
$K_0(x)$
$K_1(x)$
$K_2(x)$
$K_3(x)$

تابع مولد توابع بسل

$$w(x,t) = e^{\frac{xt}{2}} e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

بسیاری از خواص تابع بسل از طریق تابع مولد به سادگی قابل اثبات است

روابط بازگشتی توابع بسل

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x) \quad , \quad J_n'(x) = \frac{d}{dx} J_n(x)$$

$$\frac{①+②}{2} \Rightarrow J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J_n'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\frac{②-①}{2} \Rightarrow J_{n+1}(x) = \frac{n J_n(x)}{x} - J_n'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

انتگرال گیری از توابع بسل

$$\frac{d}{dx}\left[x^{n}J_{n}(x)\right]=x^{n}J_{n-1}(x) \Rightarrow \int x^{n}J_{n-1}(x)\,dx = x^{n}J_{n}(x)+C$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_{n}(x)\right]=-x^{-n}J_{n+1}(x) \Rightarrow \int x^{-n}J_{n+1}(x)\,dx = -x^{-n}J_{n}(x)+C$$

for $n=0 \Rightarrow \int J_{1}(x)\,dx=-J_{0}(x)+C$

for $n=1 \Rightarrow \int xJ_{0}(x)\,dx = xJ_{1}(x)+C$

فرم رایج معادله بسل

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - \nu^2)y = 0$$

با تغییر متغیر $kx = z$

$$kx = z \Rightarrow x = \frac{z}{k} \Rightarrow dx = \frac{dz}{k}$$

$$y' = \frac{dy(x)}{dx} = k\frac{dy(z)}{dz} \quad , \quad y'' = k^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z}{k}\right)^2 k^2 y'' + \frac{z}{k} k y' + (z^2 - \nu^2)y = 0$$

$$\Rightarrow z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0$$

که در آن $y' = \dfrac{dy(z)}{dz}$

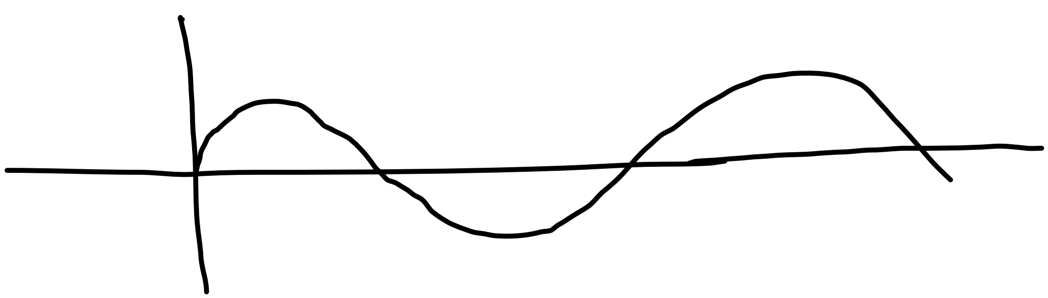
$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = 0$$

$$\Rightarrow y(z) = c_1 J_\nu(z) + c_2 Y_\nu(z) = c_1 J_\nu(kx) + c_2 Y_\nu(kx)$$

یادآوری

$$\left.\begin{array}{l} y'' + \lambda^2 y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y(L) = \sin \lambda L = 0$$

$$\Rightarrow \lambda L = n\pi \longrightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \ , \quad n = 1, 2, \dots$$



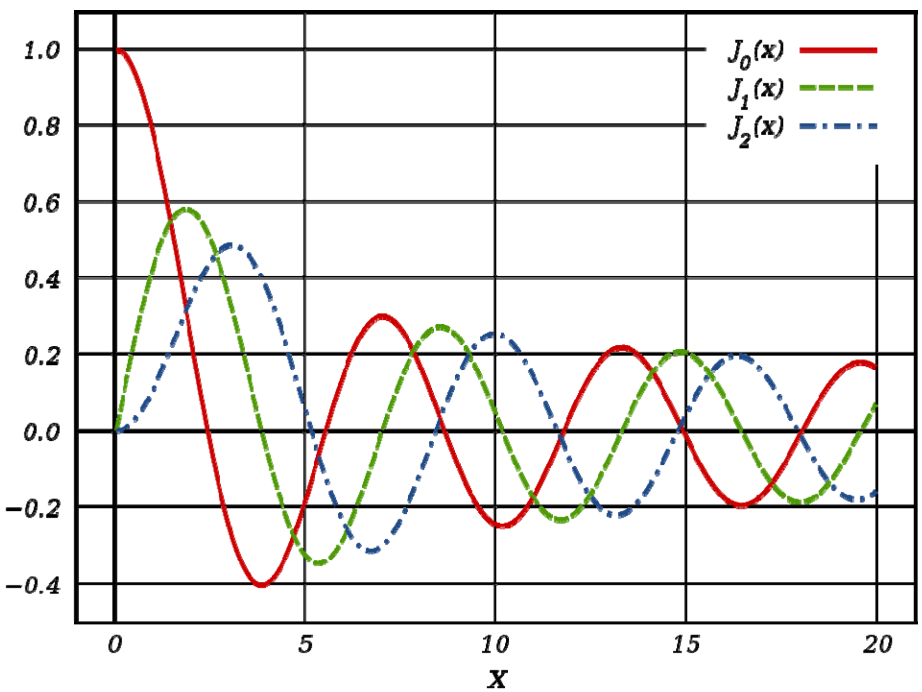
$$\lambda L = z_n = n\pi$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

در حل معادلات بسل با اعمال شرایط مرزی به معادله $J_\nu(kb)=0$ می رسیم

با فرض $\nu=0$،

$$J_0(kb)=0$$



$$z_{01}=2.4$$

$$z_{02}=5.5$$

$$z_{03}=8.6$$

$$z_{04}=11.8$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow kb=z_{0n} \Rightarrow k_n=\frac{z_{0n}}{b}$$

تعامد توابع بسل

پاسخ معادله بسل به صورت $J_\nu(k_m x)$ می باشد. تابع $J_\nu(k_m x)$ را متعامد گویند اگر

$$\int_0^b x J_\nu(k_m x) J_\nu(k_n x)\,dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

که در آن k_n و k_m ریشه های متمایز $J_\nu(kb)=0$ هستند.

اثبات را از کتاب بخوانید. به ازای $m=n$

$$I = \int_0^b x J_\nu^2(k_n x)\,dx = \frac{1}{2} b^2 J_{\nu+1}^2(k_n b)$$

با اثبات تعامد تابع بسل نوع اول، می توان هر تابع دلخواهی را در بازه $0<x<b$

بصورت زیر بسط سری فوریه داد

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} c_j\, J_\nu(k_j x)$$

که در آن ضرایب c_j بصورت زیر محاسبه می شود

$$c_j=\frac{2}{b^2 J_{\nu+1}^2(k_j b)}\int_0^b x f(x) J_\nu(k_j x)\,dx \quad , \quad j=1,2,3,\dots$$

k_j ریشه های مثبت $J_\nu(kb)=0$

$J_0'(Kb)=0$ یا

برای حالت $K_1=0$ و $K_j\ (j=2,3,\dots)$ ریشه‌های مثبت $J_1(Kb)=0$

$$c_1=\frac{2}{b^2}\int_0^b x f(x)\,dx,$$

$$c_j=\frac{2}{b^2 J_0^2(K_j b)}\int_0^b x f(x) J_0(K_j x)\,dx, \qquad j=2,3,\dots$$

اگر k_j ریشه های مثبت $hJ_n(kb)+(kb)J_n'(kb)=0$ باشد $h\geq 0 \,,\, h+n>0$

$$c_j=\frac{2k_j^2}{(k_j^2b^2-n^2+h^2)J_n^2(k_jb)}\int_0^b x\,f(x)\,J_n(k_jx)\,dx\,, \quad j=1,2,3,\dots$$

مثال : انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int x^2 J_2(x)\,dx \quad \text{و} \quad \int x^{-n} J_{n+1}(x)\,dx = -x^{-n} J_n(x) + C$$

$$\int x^2 J_2(x)\,dx = \int x^3 \left[x^{-1} J_2\right] dx = x^3\left[-x^{-1} J_1\right] - \int -3x^2 \left(x^{-1} J_1\right) dx$$

$$u = x^3 \longrightarrow du = 3x^2\,dx$$

$$dv = x^{-1} J_2\,dx \xrightarrow{n=1} v = -x^{-1} J_1$$

$$= -x^2 J_1 + 3\int x J_1\,dx$$

$$\int x J_1\,dx = -xJ_0 - \int -J_0(x)\,dx$$

$$u = x$$

$$dv = \int x^0 J_1\,dx = -x^{-0} J_0(x) = -J_0(x)$$

$$\Rightarrow \int x^2 J_2(x)\,dx = -x^2 J_1(x) + 3\left[-xJ_0(x) + \int J_0(x)\,dx\right]$$

$\int J_0(x)\,dx$ حل تحلیلی ندارد و باید بصورت سری محاسبه شود.

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int J_3(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int J_3(x)\,dx = \int x^2\left[x^{-2}J_3(x)\right]dx = -x^2 x^{-2} J_2 - \int 2x\left(-x^{-2}\right)J_2\,dx$$

$$= -J_2 + 2\int x^{-1} J_2\,dx$$

$$= -J_2 - 2x^{-1} J_1 + C$$

$$u = x^2$$

$$dv = x^{-2} J_3(x)\,dx \Rightarrow v = -x^{-2} J_2$$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int \frac{J_2(3x)}{x^2}\,dx = \frac{1}{9}\int \overbrace{(3x)^2 J_2(3x)}^{u}\ \overbrace{\frac{dx}{x^4}}^{dv} \quad , \quad 3x = t \to dx = \frac{dt}{3}$$

$$= \frac{1}{9}\int t^2 J_2(t)\,\frac{3^4}{t^4}\,\frac{dt}{3}$$

$$= 3\int t^2 J_2(t)\,\frac{dt}{t^4}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = t^2 J_2(t) \Rightarrow du = t^2 J_1(t)\,dt \\ dv = \dfrac{dt}{t^4} \to v = \dfrac{-1}{3t^3} \end{array}}$$

$$= 3\left\{-\frac{J_2(t)}{3t} - \int \frac{-1}{3t^3}\,t^2 J_1(t)\,dt\right\} = -\frac{J_2(t)}{t} + \int \frac{1}{t} J_1(t)\,dt$$

$$= -\frac{J_2(t)}{t} + \int J_1(t)\,\frac{dt}{t} = \frac{J_2(t)}{t} - J_1(t) + \int J_0(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int J_1(t)\,\frac{dt}{t} = \int t J_1(t)\,\frac{dt}{t^2} = -J_1(t) - \int -J_0(t)\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l} tJ_1(t) = u \Rightarrow du = tJ_0\,dt \\ \dfrac{dt}{t^2} = dv \Rightarrow v = \dfrac{-1}{t} \end{array}}$$

$\Rightarrow$ جواب نهایی $= \dfrac{J_2(3x)}{3x} - J_1(3x) + 3\displaystyle\int J_0(3x)\,dx$

مثال: تابع $f(x)=4x-x^3$ را در بازه $(0,2)$ برحسب توابع بسل نوع اول و با شرط $y(2)=0$ بسط دهید:

$$f(x)=4x-x^3=\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_1(\lambda_n x)$$

$$c_n=\frac{1}{2J_2^2(2\lambda_n)}\int_0^2 (4x^2-x^4)\,J_1(\lambda_n x)\,dx$$

$$4\int_0^2 x^2 J_1(\lambda_n x)\,dx=\frac{16}{\lambda_n^2}J_2(2\lambda_n)$$

$$\int x^4 J_1(\lambda_n x)\,dx = \left(-\frac{16}{\lambda_n} + \frac{32}{\lambda_n^3}\right) J_0(2\lambda_n)$$

از طرفی داریم

$$J_{n+1}(x) = -J_{n-1}(x) + \frac{2n}{x} J_n(x)$$

$$\Rightarrow J_2(2\lambda_n) = -J_0(2\lambda_n) + \frac{2}{2\lambda_n} J_1(2\lambda_n) = -J_0(2\lambda_n)$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{-16}{\lambda_n^3 J_0(2\lambda_n)}$$

مثال: مطلوب است سری فوریه - بسل تابع $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 0 & 1<x<2 \end{cases}$ بر حسب

تابع بسل نوع اول مرتبه یک، $J_1(\lambda_n x)$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_1(\lambda_n x)$$

$$C_n=\frac{1}{2J_2^2(2\lambda_n)}\int_0^2 x f(x) J_1(\lambda_n x)\,dx=\frac{1}{2J_2^2(2\lambda_n)}\int_0^1 x^2 J_1(\lambda_n x)\,dx$$

باوفرض $t=\lambda_n x \rightarrow dx=\frac{dt}{\lambda_n} \Rightarrow C_n=\frac{1}{2J_2^2(2\lambda_n)}\int_0^{\lambda_n}\frac{t^2}{\lambda_n^2}J_1(t)\frac{dt}{\lambda_n}$

$x=1 \Rightarrow t=\lambda_n$

$$C_n = \frac{1}{2J_2^2(2\lambda_n)} \int_0^{\lambda_n} \frac{t^2}{\lambda_n^2} J_1(t) \frac{dt}{\lambda_n} = \frac{1}{2\lambda_n^3 J_2^2(2\lambda_n)} \int_0^{\lambda_n} t^2 J_1(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n^3 J_2^2(2\lambda_n)} \Big[t^2 J_2(t) \Big]_0^{\lambda_n} = \frac{1}{2\lambda_n^3 J_2^2(2\lambda_n)} \Big[\lambda_n^2 J_2(\lambda_n) - \lambda_n^2 J_2(0) \Big]$$

$$= \frac{J_2(\lambda_n)}{2\lambda_n J_2^2(2\lambda_n)}$$

روابط بازگشتی توابع بسل

در حالت کلی، روابط بازگشتی توابع بسل را می توان بدون در نظر گرفتن نوع تابع به صورت زیر نوشت

$$\zeta_{\nu-1}(z) + \zeta_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\zeta_\nu(z)$$

$$\zeta_{\nu-1}(z) - \zeta_{\nu+1}(z) = 2\zeta'_\nu(z)$$

$$\zeta'_\nu(z) = \zeta_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z}\zeta_\nu(z)$$

$$\zeta'_\nu(z) = -\zeta_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z}\zeta_\nu(z)$$

که در آن ζ می تواند هر یک از توابع J ، Y ، $H^{(1)}$ و $H^{(2)}$ یا ترکیب خطی از آنها باشد.

توابع بسل کروی

معادله دیفرانسیل در مختصات کروی اغلب به معادله زیر منجر می شود

$$x^2 y'' + 2xy' + \left[k^2x^2 - n(n+1)\right]y = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

این معادله حالت خاصی از معادله زیر است

$$x^2 y'' + (1-2a)xy' + \left[b^2c^2x^{2c} + (a^2 - c^2\nu^2)\right]y = 0, \quad \nu \geq 0, \quad b > 0$$

با انتخاب $a = \frac{-1}{2}$ ، $b = k$ ، $c = 1$ و $\nu = n + \frac{1}{2}$

$$y(x) = x^{a}\left[c_1 J_\nu(bx^c) + c_2 Y_\nu(bx^c)\right] = x^{-\frac{1}{2}}\left[c_1 J_{n+\frac{1}{2}}(kx) + c_2 Y_{n+\frac{1}{2}}(kx)\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left[C_1 J_{n+\frac{1}{2}}(kx) + C_2 Y_{n+\frac{1}{2}}(kx) \right] \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

حال با تعریف توابع بسل کروی نوع اول و دوم به صورت زیر

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad \text{و} \quad y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, Y_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

پاسخ عمومی را می توان به صورت زیر نوشت

$$y(x) = C_1 j_n(x) + C_2 y_n(x)$$

توابع هنکل کروی نیز می شوند

$$h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x) = j_n(x) + i\, y_n(x)$$

$$h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(x) = j_n(x) - i\, y_n(x)$$

با جایگذاری $n+\frac{1}{2}$ در رابطه J_n می توان نشان داد که

$$j_n = 2^n x^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s+n)!}{(2s+2n+1)!\, s!}\, x^{2s}$$

بعضی روابط ساده و پرکاربرد در توابع بسل کروی

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x},$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\frac{\sin x}{x} - \frac{3\cos x}{x^2},$$

$$j_3(x) = \left(\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x}\right)\frac{\sin x}{x} - \left(\frac{15}{x^2} - 1\right)\frac{\cos x}{x}$$

and[29]

$$y_0(x) = -j_{-1}(x) = -\frac{\cos x}{x},$$

$$y_1(x) = j_{-2}(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x},$$

$$y_2(x) = -j_{-3}(x) = \left(-\frac{3}{x^2} + 1\right)\frac{\cos x}{x} - \frac{3\sin x}{x^2},$$

$$y_3(x) = j_{-4}(x) = \left(-\frac{15}{x^3} + \frac{6}{x}\right)\frac{\cos x}{x} - \left(\frac{15}{x^2} - 1\right)\frac{\sin x}{x}.$$

$$h_0^{(1)}(x) = -\frac{i}{x} e^{ix}$$

$$h_0^{(2)}(x) = \frac{i}{x} e^{-ix}$$

$$h_1^{(1)}(x) = \left(-\frac{1}{x} - \frac{i}{x^2}\right) e^{ix}$$

$$h_2^{(2)}(x) = \left(\frac{i}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{3i}{x^3}\right) e^{ix}$$

توابع بسل کروی اصلاح شده:

معادله دیفرانسیل زیر

$$x^2 y'' + 2x y' - [x^2 + n(n+1)]y = 0$$

به ازای $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ در نظر بگیرید. مجموعه های زیر پاسخ های مستقل خطی این معادله هستند

$$\left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, I_{n+\frac{1}{2}}(x) \,,\ \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, K_{n+\frac{1}{2}}(x) \right\}$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, I_{n+\frac{1}{2}}(x) \,,\ \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, I_{-n-\frac{1}{2}}(x) \right\}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, I_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sinh x}{x}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, I_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\cosh x}{x}$$

معادلاتی که برحسب توابع بسل حل می شوند

نوع اول:

$$x^2 y'' + (1-2n)x y' + k^2 x^2 y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y'' + \frac{1-2n}{x} y' + k^2 y = 0$$

با فرض $y = v x^n$ معادله بصورت زیر خواهد شد

$$v'' + \frac{v'}{x} + \left(k^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) = 0$$

$$v(x) = A J_n(kx) + B Y_n(kx) \Rightarrow y(x) = x^n \left(A J_n(kx) + B Y_n(kx)\right)$$

نوع دوم:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} + \left[\beta^2 k^2 x^{2\beta-2} - \frac{\beta^2 n^2}{x^2}\right] v = 0$$

$$v(x) = A J_n(kx^\beta) + B Y_n(kx^\beta)$$

نوع سوم:

$$u'' + \left[\frac{2\alpha - 2\beta n + 1}{x}\right] u' + \left[\beta^2 k^2 x^{2\beta-2} + \frac{\alpha(\alpha - 2\beta n)}{x^2}\right] u = 0$$

$$u = x^{\beta n - \alpha}\left\{A J_n(kx^\beta) + B Y_n(kx^\beta)\right\}$$

نوع چهارم

$$y'' + \frac{a+2bx^p}{x}y' + \left[\frac{c+dx^{2q}+b(a+p-1)x^p+b^2x^{2p}}{x^2}\right]y = 0$$

$$y(x) = x^{\alpha} e^{-\beta x^p}\left[c_1 J_n(\lambda x^q) + c_2 Y_n(\lambda x^q)\right]$$

$$\alpha = \frac{1-a}{2}, \quad \beta = \frac{b}{q}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{|d|}}{q}, \quad n = \frac{\sqrt{(1-q^2)-4c}}{2q}$$

اگر $d<0$ باشد، I_n و K_n به ترتیب جانشین J_n، Y_n خواهند شد.

نوع پنجم

$$x^2y'' + (1-2a)xy' + [b^2c^2x^{2c} + (a^2-c^2p^2)]y = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = x^a\left[C_1 J_p(bx^c) + C_2 Y_p(bx^c)\right]$$

مثال: پاسخ عمومی معادله زیر را بنویسید.

$$x^2y'' + 5xy' + (4x^2+3)y = 0$$

$$1-2a = 5 \longrightarrow a = -2$$

$$b^2c^2 = 4 \longrightarrow b = 2$$

$$c = 1$$

$$a^2 - c^2p^2 = 3 \rightarrow 4 - p^2 = 3 \rightarrow p = 1$$

$$\Rightarrow y = x^{-2}\left[C_1 J_1(2x) + C_2 Y_1(2x)\right]$$

مثال : پاسخ عمومی تابع زیر را به دست آورید.

$$y'' + xy = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y'' + x^3 y = 0$$

$$x^2 y'' + (1-2a)xy' + [b^2 c^2 x^{2c} + (a^2 - c^2 p^2)]y = 0$$

$$1-2a = 0 \rightarrow a = 0.5$$

$$2c = 3 \rightarrow c = 1.5$$

$$b^2 c^2 = 1 \rightarrow b = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$$

$$a^2 - c^2 p^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 p^2 = 0 \rightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x}\left[c_1 J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]$$

مثال: پاسخ عمومی $y'' + x^m y = 0 \Leftarrow x^2 y'' + x^{m+2} y = 0$

$1-2a=0 \rightarrow a=\frac{1}{2}$

$2c = m+2 \rightarrow c = \frac{m+2}{2}$

$b^2c^2=1 \Rightarrow b=\frac{1}{c}=\frac{2}{m+2}$

$a^2-c^2p^2=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 p^2$

$\Rightarrow p = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{m+2}{2}} = \frac{1}{m+2}$

$\Rightarrow y(x) = \sqrt{x}\left[C_1 J_p(bx^c) + C_2 Y_p(bx^c)\right]$

Modulation Theorem

i. $F_s[f(x) \sin ax] = (1/2)[F_c(s-a) - F_c(s+a)]$.

ii. $F_s[f(x) \cos ax] = (1/2)[F_s(s+a) + F_s(s-a)]$.

iii. $F_c[f(x) \cos ax] = (1/2)[F_c(s+a) + F_c(s-a)]$.

iv. $F_c[f(x) \sin ax] = (1/2)[F_s(s+a) - F_s(s-a)]$.

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}\, d\omega$	$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\, dx$	Reference
$e^{-\alpha x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}e^{-\omega^2/4\alpha}$	Gaussian (Sec. 10.3.3)
$\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-x^2/4\beta}$	$e^{-\beta\omega^2}$	Gaussian (Sec. 10.3.3)
$\frac{\partial f}{\partial t}$	$\frac{\partial F}{\partial t}$	Derivatives (Sec. 10.4.2)
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$-i\omega F(\omega)$	Derivatives (Sec. 10.4.2)
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$(-i\omega)^2 F(\omega)$	Derivatives (Sec. 10.4.2)
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\overline{x})g(x-\overline{x})d\overline{x}$	$F(\omega)G(\omega)$	Convolution (Sec. 10.4.3)
$\delta(x-x_0)$	$\frac{1}{2\pi}e^{i\omega x_0}$	Dirac delta function (Exercise 10.3.18)
$f(x-\beta)$	$e^{i\omega\beta}F(\omega)$	Shifting theorem (Exercise 10.3.5)
$xf(x)$	$-i\frac{dF}{d\omega}$	Multiplication by x (Exercise 10.3.8)
$\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$	$e^{-\lvert\omega\rvert\alpha}$	Exercise 10.3.7
$f(x) = \begin{cases} 0 & \lvert x\rvert > a \\ 1 & \lvert x\rvert < a \end{cases}$	$\frac{1}{\pi}\frac{\sin a\omega}{\omega}$	Exercise 10.3.6

Table 10.4.1: Fourier Transform

Table of Fourier Cosine Transforms

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{F}_c(f)(\omega) \cos \omega x \, d\omega,$ $0 < x < \infty$	$\mathcal{F}_c(f)(\omega) = \widehat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx,$ $0 \le \omega < \infty$
1. $\begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega}$
2. $e^{-ax}, \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\omega^2}$
3. $x\,e^{-ax}, \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^2-\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}$
4. $e^{-a\,x^2/2}, \quad a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\omega^2/2a}$
5. $\cos ax\, e^{-ax}, \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a\omega^2+2a^3}{4a^4+\omega^4}$
6. $\sin ax\, e^{-ax}, \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2a^3-a\omega^2}{4a^4+\omega^4}$
7. $\frac{a}{a^2+x^2}, \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\,\omega}$
8. $x^p, \quad 0 < p < 1$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(p)\cos(p\omega/2)}{\omega^p}$
9. $\begin{cases} \cos x & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-\omega)}{1-\omega} + \frac{\sin a(1+\omega)}{1+\omega} \right]$

Table 10.5.2: Fourier Cosine Transform

$f(x) = \int_0^\infty F(\omega)\cos\omega x \, d\omega$	$C[f(x)] = F(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x \, dx$	Reference
$\frac{df}{dx}$	$-\frac{2}{\pi}f(0) + \omega S[f(x)]$	Derivatives (Sec. 10.5.4)
$\frac{d^2 f}{dx^2}$	$-\frac{2}{\pi}\frac{df}{dx}(0) - \omega^2 F(\omega)$	
$\frac{\beta}{x^2+\beta^2}$	$e^{-\omega\beta}$	Exercise 10.5.1
$e^{-\epsilon x}$	$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\epsilon}{\epsilon^2+\omega^2}$	Exercise 10.5.2
$e^{-\alpha x^2}$	$2\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}e^{-\omega^2/4\alpha}$	Exercise 10.5.3
$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\bar{x})[f(x-\bar{x})+f(x+\bar{x})]d\bar{x}$	$F(\omega)G(\omega)$	Convolution (Exercise 10.5.7)

Table 10.5.1: Fourier Sine Transform

$f(x) = \int_0^\infty F(\omega)\sin\omega x\, d\omega$	$S[f(x)] = F(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\, dx$	Reference
$\frac{df}{dx}$	$-\omega C[f(x)]$	Derivatives (Sec. 10.5.4)
$\frac{d^2f}{dx^2}$	$\frac{2}{\pi}\omega f(0) - \omega^2 F(\omega)$	Derivatives (Sec. 10.5.4)
$\frac{x}{x^2+\beta^2}$	$e^{-\omega\beta}$	Exercise 10.5.1
$e^{-\epsilon x}$	$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{\epsilon^2+\omega^2}$	Exercise 10.5.2
1	$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega}$	Exercise 10.5.9
$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\overline{x})[g(x-\overline{x}) - g(x+\overline{x})]d\overline{x} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\overline{x})[f(x+\overline{x}) - f(\overline{x}-x)]d\overline{x}$	$S[f(x)]C[g(x)]$	Convolution (Exercise 10.5.6)

مقادیر و توابع ویژه برای شرایط مختلف مرزی دیریکله و نیومن - بازه متناهی

7

معادله $X'' + \lambda X = 0$ در بازه متناهی				
حالت	شرایط مرزی	مقدار ویژه $(\lambda_n = \alpha_n{}^2)$	تابع ویژه	دوره تناوب تابع ویژه
۱	$X(0) = 0; X(l) = 0$ $0 \leq x \leq l$	$\alpha_n = \dfrac{n\pi}{l}\ ; n = 1,2, \ldots$	$\phi_n = \sin(\alpha_n x)$	$2l$
۲	$X'(0) = 0; X'(l) = 0$ $0 \leq x \leq l$	$\alpha_n = \dfrac{n\pi}{l}\ ; n = 0,1, \ldots$	$\phi_n = \cos(\alpha_n x)$	$2l$
۳	$X(0) = 0; X'(l) = 0$ $0 \leq x \leq l$	$\alpha_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\ ; n = 1,2, \ldots$	$\phi_n = \sin(\alpha_n x)$	$4l$
۴	$X'(0) = 0; X(l) = 0$ $0 \leq x \leq l$	$\alpha_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\ ; n = 1,2, \ldots$	$\phi_n = \cos(\alpha_n x)$	$4l$
۶	$X(-l) = X(l); X'(-l) = X'(l)$ $-l \leq x \leq l$	$\alpha_n = \dfrac{n\pi}{l}\ ; n = 0,1, \ldots$	$\begin{cases} \phi_n = \sin(\alpha_n x)\ ; n \neq 0 \\ \phi_n = \cos(\alpha_n x) \end{cases}$	$2l$

مقادیر و توابع ویژه برای شرایط مختلف مرزی دیریکله و نیومن - بازه نامتناهی

8

معادله $X'' + \lambda X = 0$ در بازه نامتناهی

حالت	شرایط مرزی	مقدار ویژه ($\lambda = a^2$)	تابع ویژه
۱	$X(0) = 0; \lvert X(\infty)\rvert < M$ $0 \le x < \infty$	$\forall\, \alpha > 0$	$\phi = \sin(\alpha x)$
۲	$X'(0) = 0; \lvert X(\infty)\rvert < M$ $0 \le x < \infty$	$\forall\, \alpha \ge 0$	$\phi = \cos(\alpha x)$
۳	$\lvert X(\pm\infty)\rvert < M$ $-\infty < x < \infty$	$\forall\, \alpha \ge 0$	$\begin{cases}\phi = \sin(\alpha x)\,;\ \alpha \ne 0 \\ \phi = \cos(\alpha x)\end{cases}$